

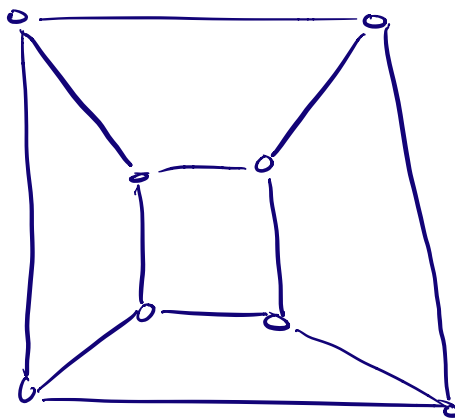
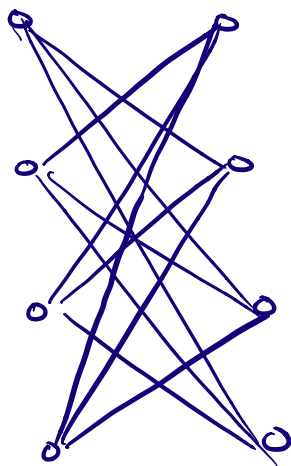
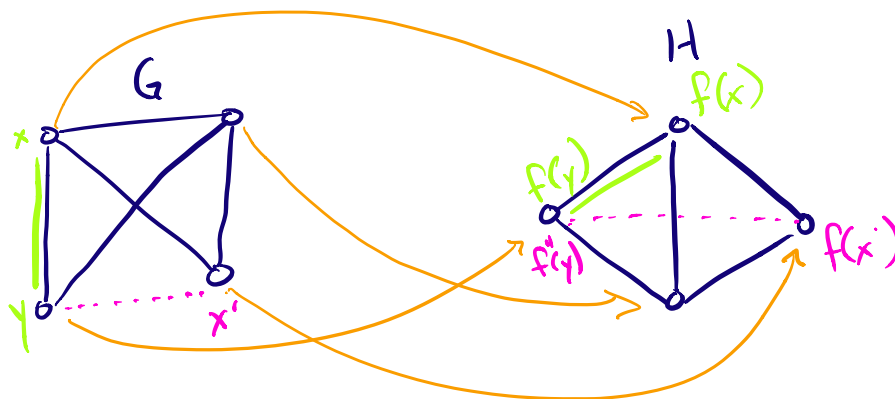
Isomorfismo di grafi

due grafi H e G sono isomorfi se $\exists$
una bijezione $f: V(G) \rightarrow V(H)$

con la proprietà che

$$\{x, y\} \in E(G) \iff \{f(x), f(y)\} \in E(H)$$

esempio



es trovare l'isomorfismo tra G e H .

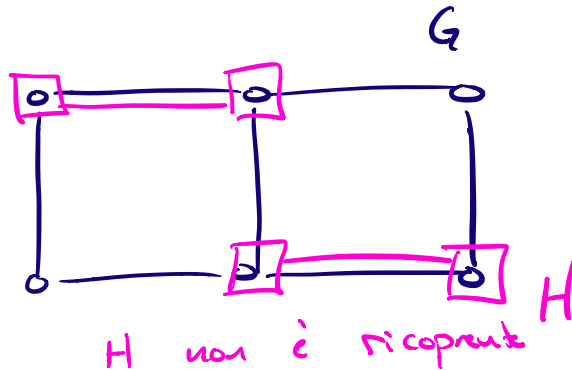
Sottografi:

un grafo G' è un sottografo di G se

$$V(G') \subseteq V(G)$$

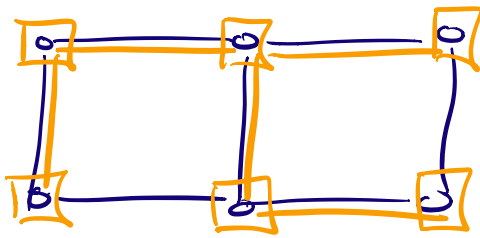
$$E(G') \subseteq E(G)$$

essendo un grafo $E(G') \subseteq \binom{V(G')}{2}$



il sotto grafo H
 H detto ricoprente
(di copertura) se

$$V(H) = V(G)$$



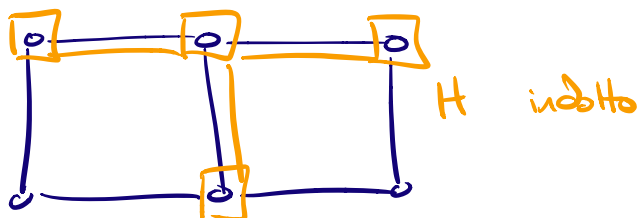
H' è ricoprente

un sotto grafo H di G detto indotto

se H include tutti gli archi di G con
termini dentro $V(H)$

$$\Leftrightarrow E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$$

esempio



N.B. gli archi di H sono determinati dalla scelta dell'insieme $V(H)$.

in generale, usiamo $G[X]$ per il sottografo indotto di G con vertici $X \subseteq V(G)$.

x un vertice in un grafo G :

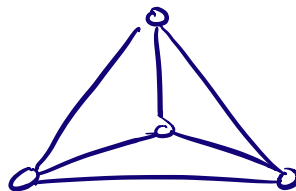
intorno di x $N(x), \Gamma(x) := \{y : y \in V(G), \{x, y\} \in E\}$

grado di x $\deg_G(x), \deg(x) = |\Gamma(x)|$

grado di un grafo $\Delta(G) = \max_{x \in V(G)} \deg_G(x)$

un grafo è regolare se tutti i vertici hanno lo stesso grado

K_n è $n-1$ regolare

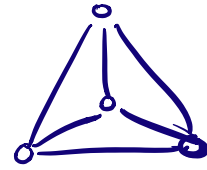


3- regolare.

Prop $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 |E(G)|$

intuizione
 è contata
 due volte nella
 somma

ogni arco di
 $G \{x, y\}$



$\deg = 3$

$3 \cdot 4 = 12$

$12/2 = 6 = |E(K_4)|$

Dim

definiamo l'insieme

$$A = \left\{ (x, e) : x \in V(G), \begin{array}{l} e \text{ un arco con} \\ \text{# termine } x \\ \text{ie } x \in e \end{array} \right\}$$

$$A = \bigcup_{x \in V(G)} \left\{ (x, e) : e \in E(G), x \in e \right\}$$

insieme di:
~~# numero~~ di archi incidenti
 con x

$$\Rightarrow |A| = \sum_{x \in V(G)} \left| \{x, e : e \in E(G), x \in e\} \right|$$

$$= \sum_{x \in V(G)} \deg(x)$$

invece raggruppando insieme tutti gli elementi
di A (x, e) con lo stesso valore e

$$A = \bigcup_{e \in E(G)} \{x : x \in V(G), x \in e\}$$

$$|A| = \sum_{e \in E(G)} |\underbrace{\{x : x \in V(G), x \in e\}}_{= |e| = 2}|$$

$\Rightarrow$

$$|A| = \sum_{e \in E(G)} 2 = 2|E(G)|$$

conclusione $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = |A| = 2|E(G)|$



Cor G un grafo, il numero di vertici
con grado dispari è un valore pari;

Dim

$$\begin{aligned} \uparrow \\ \text{numero pari} \quad 2|E| &= \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \\ &= \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \deg(v) \text{ pari}}} \deg(v) + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \deg(v) \text{ dispari}}} \deg(v) \end{aligned}$$

$\uparrow$
pari

$\Rightarrow \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \deg(v) \text{ dispari}}} \deg(v)$ è pari

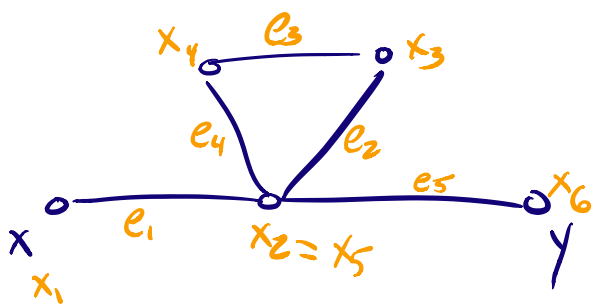
$\Rightarrow$ il numero di vertici $v \in V(G)$ con $\deg(v)$ dispari è pari.



Def una passeggiata da x a y per $x, y \in V(G)$ è una sequenza
 e_i è un arco e $e_i = \{x_i, x_{i+1}\} \quad i \leq k-1$

$x = x_1 \xrightarrow{e_1} x_2 \xrightarrow{e_2} x_3 \dots x_{k-1} \xrightarrow{e_k} x_k = y$

$x_i \in V(G) \quad \forall i$



non è un cammino,
 x_1, e_1, x_2, e_5, x_6
 invece è un
 cammino da $x \rightarrow y$

lunghezza della passeggiata è il numero di
 archi

per definizione, x_i è una passeggiata
 da x_i a x_i di
 lunghezza 0

un cammino in un grafo è una passeggiata che non ripete vertici oppure archi

la passeggiata detto chiuso se $x = y$

Def x sia raggiungibile da y se $\exists$ una passeggiata da $x \rightarrow y$

allora "essere raggiungibile" definisce una relazione binaria su $V(G)$

Prop "essere raggiungibile" è una relazione di equivalenza.

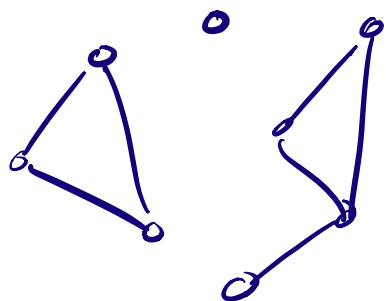
Dim es

questa relazione di equivalenza definisce una partizione sui vertici

Il grafo è detto connesso se la partizione consiste di un solo insieme:

cioè ogni coppia di vertici x, y hanno la proprietà che x sia raggiungibile da y

in generale, le classi di equivalenza sono
i componenti connessi dello grafo



grafo con 3
componenti connessi

usiamo notazione

$\lambda(G) := \#$ di componenti
connessi.

Prop Se $\exists$ una passeggiata da $x \rightarrow y$
in un grafo G , allora esiste un cammino
da $x \rightarrow y$.

Dim ~~per~~

"Se $\exists$ una passeggiata da $x \rightarrow y$ di
lunghezza k in un grafo G
 $\Rightarrow \exists$ un cammino da $x \rightarrow y$ "

Induzione su k

Caso base dell'induzione:

$k=1$: se esiste una passeggiata da $x \rightarrow y$
di lunghezza 1 $\Rightarrow \exists$ un arco
da $x \rightarrow y$ e quella passeggiata

non ripete vertici e archi $\Rightarrow$ è
un cammino semplice